CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1980

●

CONCOURS SCIENCES

CALCUL NUMERIQUE

Durée : 2 heures

Mardi 6 mai 1980 de 14 heures à 16 heures

●

Le candidat est invité à préciser le moyen de calcul qu'il utilise (règle ou cercle à calcul, tables numériques, calculette avec ou sans fonctions mathématiques, programmable ou non), en indiquant le nombre de chiffres décimaux que ce moyen procure. Les calculs seront présentés dans des tableaux clairs où figureront tous les résultats intermédiaires.

1) On note p_N le demi-périmètre du polygone régulier de N côtés inscrit dans le cercle de rayon unité, et on pose : $x_N = \pi/_N$ et $u_N = \sin x_N$. $\forall N \geqslant 2$.

a) Montrer que $p_N = N u_N$ et $\lim_{N \to \infty} p_N = \pi$.

b) Montrer que $0 < \dfrac{\pi - p_N}{\pi} < \dfrac{x_N^2}{6}$ et en déduire une valeur N telle que p_N fournisse une approximation de π avec une erreur relative inférieure à 10^{-5}.

c) Montrer que $u_{2N} = \sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{1 - u_N^2}}{2}}$

2) En vue de nous limiter désormais aux polygônes à $N_n = 3 \times 2^n$ côtés, on pose : $X_n = x_{N_n}$ $U_n = u_{N_n}$ et $P_n = p_{N_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Calculer P_0 et U_0

b) Montrer que $U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1 - \sqrt{1 - U_n^2}}{2}} = \dfrac{U_n}{\sqrt{2\,(1 + \sqrt{1 - U_n^2})}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que, si nous posons $Y_n = 2\sqrt{1 - U_n^2}$ nous avons $Y_{n+1} = \sqrt{2 + Y_n}$

et $P_{n+1} = P_n \times \dfrac{2}{Y_{n+1}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, avec $Y_0 = 1$.

d) Utiliser ces relations pour calculer Y_n et P_n pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ avec la précision que permet votre matériel de calcul le plus précis.

e) Donner une estimation de l'écart $\pi - P_4$ et vérifier la cohérence des résultats obtenus en (2, *d*).

3) On définit récursivement les nombres $T_k^{(n)}$ pour $k, n \in \mathbb{N}$ par :

$$(\mathcal{R}) \begin{cases} T_0^{(n)} = P_n , \ \forall n \in \mathbb{N} , \\ T_{k+1}^{(n)} = \dfrac{4^{k+1} T_k^{(n+1)} - T_k^{(n)}}{4^{k+1} - 1} , \ \forall k, n \in \mathbb{N} . \end{cases}$$

et on pose $a_i = \dfrac{(-X_0^2)^i}{(2i+1)!}$ et $c_i = (1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{4^2}) \ldots\ldots (1-\frac{1}{4^i})$, $\forall i \in \mathbb{N}$

(avec, en particulier $a_0 = c_0 = 1$), et $b_{k,i} \quad \dfrac{c_{i-1}}{c_k \times c_{i-k-1}}$, $\forall k, i \in \mathbb{N}$ tels que $k < i$.

a) Montrer que $$\frac{T_k^{(n)} - \pi}{\pi} = \frac{(-1)^k}{2^{k(k+1)}} \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{a_i b_{k,i}}{4^{ni}}$$

b) Montrer que, sous certaines conditions qu'on précisera, on a : $a^m < m ! < m^m$, et en déduire que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\log_b \left(\dfrac{\pi}{\pi - T_k^{(0)}} \right)}{k(k+1) \log_b 2} = 1 , \ \forall b > 1 .$$

c) Préciser comment le nombre $\dfrac{\pi}{\pi - T_k^{(0)}}$ est lié au nombre de chiffres communs aux représentations décimales de π et $T_k^{(0)}$ et en déduire une valeur approchée du plus petit entier k_M tel que les représentations décimales de π et $T_{k_M}^{(0)}$ coïncident jusqu'au M^{e} chiffre. On calculera ces valeurs approchées pour M = 5 et 10^i, i = 1, 2, 3, 4, 5, et 6.

d) Utiliser les relations $(\mathcal{R})$ et les résultats numériques (2, *d*) pour calculer $T_k^{(0)}$ jusqu'à ce qu'on obtienne une approximation de π qui s'accorde à la précision du moyen de calcul dont on dispose.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail